

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 9 - סדרות

תוכן העניינים

1. מבחן קושי להתכנסות סדרות..... 1
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות..... 3
3. חישוב גבול לפי אוילר..... 5
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'..... 6
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש..... 9
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית..... 10
7. חישוב גבול לפי ההגדרה..... 12
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה..... 14
9. הגדרת הגבול לפי היינה..... 17
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס..... 19
11. משפט שטולץ..... 24
12. היכרות עם סדרות..... (ללא ספר).....
13. שאלות הוכח או הפרך..... 26

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

(1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ לכל n . הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

(3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

(4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$ לכל n , כאשר $0 < a < 1$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

(6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k |x_{n+1} - x_n|$ לכל n , כאשר $0 < k < 1$. הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

(7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$

ג. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

(9) נגדיר סדרה x_n על ידי $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(10) סדרה x_n מקיימת $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל n טבעי, ו- $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$.

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n}$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right)$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}}$
- (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}}$
- (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}}$
- (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}}$
- (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}}$
- (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right)$
- (13) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}}$
- (14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$
- (15) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$
- (16) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n)$
- (17) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
- (18) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)$
- (19) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn})$
- (20) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right)$
- (21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1}$
- (22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1}$
- (23) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n}$
- (24) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

* רמז לשאלה 24: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|--|-----------------------|
| 4 (2 | 0 (1 |
| 0 (4 | ∞ (3 |
| 1 (6 | -5 (5 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8 | 1.5 (7 |
| 4 (10 | 0.25 (9 |
| $\ln 3$ (12 | 2 (11 |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13 |
| (14 $(\lim a_n = \infty) \Leftarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftarrow (b \neq 0)$ | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16 | 2.5 (15 |
| 0.5 (18 | 0.5 (17 |
| 4 (20 | $\frac{a-b}{2}$ (19 |
| $\frac{1}{3}$ (22 | 0.5 (21 |
| 1 (24 | ∞ (23 |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

$$e \quad (8)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$$

$$13) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

$$14) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$

(15) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k\sqrt{n}}}$

(16) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

(18) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- (1) 4
 (2) 0
 (3) 0
 (4) 0.75
 (5) 3
 (6) $\frac{3}{4}$
 (7) 0
 (8) 16
 (9) 0
 (10) 1
 (11) שאלת הוכחה.
 (12) שאלת הוכחה.
 (13) 9
 (14) 1
 (15) $\frac{1}{2}$
 (16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
 (17) 1
 (18) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$, לכל n .

- א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, לכל n .

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(7) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$.

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

הוכיחו לפי ההגדרה, כי :

$$(a_n + b_n) \rightarrow a + b \quad \text{א.}$$

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b \quad \text{ב.}$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$ שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ שואפת לאינסוף.

(17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

(18) הוכיחו או הפריכו :

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

- (1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב. $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג. $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

- (2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב. $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג. $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי:

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

- (7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n = (-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n = (-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

(8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ מתבדרת.

(9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$ מתבדרת.

(10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ לא קיים גבול.

(11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2} \right]$ מתבדרת.

(12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{10} - \left[\frac{n}{10} \right]$ מתבדרת.

(13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$ מתבדרת.

(14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ מתבדרת.

(15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

(16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$ לא שואפת ל- ∞ .

(18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$ לא שואפת ל- ∞ .

(19) נתונה הסדרה $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$.

הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- ∞ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$.

(20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$ לא שואפת ל- ∞ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

(1) הוכיחו כי :

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| א. $\sin(2n\pi) = 0$ | ב. $\cos(2n\pi) = 1$ |
| ג. $\sin((2n+0.5)\pi) = 1$ | ד. $\cos((2n+0.5)\pi) = 0$ |
| ה. $\sin((2n+1)\pi) = 0$ | ו. $\cos((2n+1)\pi) = -1$ |
| ז. $\sin((2n+1.5)\pi) = -1$ | ח. $\cos((2n+1.5)\pi) = 0$ |
| ט. $\sin(n\pi) = 0$ | י. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ |
| יא. $\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n$ | יב. $\cos((n+0.5)\pi) = 0$ |

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי היינה :

- | | |
|---|--|
| (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{ x-4 }$ | (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ | (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$ |
| (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{[10x]}}$ | (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x}$ |
| (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]}$ | (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x])$ |
- (10) נתון כי $f(x) = 2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$.

- א. הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.
- ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.
- ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n , כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים.

(11) הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])$ אינו קיים לפי היינה.

רמז: הוכיחו ראשית כי לכל n טבעי מתקיים $[n^2 - 1] = n - 1$.

תשובות סופיות

10) ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n}$.

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

(5) חשבו את הגבול הבא
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

(6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$.

(7) נתונה הסדרה a_n , המוגדרת על ידי $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(8) נתונה הסדרה a_n , המוגדרת על ידי $a_1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$); $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

(10) נתונה סדרה $a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(11) נתונה סדרה $a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(12) נתונה סדרה $a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(13) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(14) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$.

מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(15) נתונה סדרה a_n , ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

(16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

(17) נתונה סדרה a_n .

a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$1. a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L$$

2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \rightarrow L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$(18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

(19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n , $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$.

(20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\liminf a_n = \limsup a_n$.

(21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$ב. \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

(22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\lim(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

(23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

הוכיחו כי

(24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $L > 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

המקיימות

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

(26) תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

27) תהי $(a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil)$.

- א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.
- ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n) .
- ג. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
- ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.
- ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$.
- ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n) .
- ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?
- ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- ט. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.
- 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, 0.25, 0.5, 0.75.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

$$(1) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L \neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n > 0$ לכל n .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{p+1}$

(4) $\frac{k}{3}$

(5) $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

שאלות הוכיחו או הפריכו

הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים :

- א. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X .
 ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X .
 ג. לכל n , פרט למספר סופי של n -ים, מתקיימת הטענה X .

שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

- (1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$(11) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ וגם } b_n \text{ חסומה, אז } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty.$$

$$(12) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \text{ וגם } a_n < 1 \text{ לכל } n, \text{ אז } k < 1.$$

$$(13) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ אז } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1.$$

(14) הוכיחו או הפריכו :

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

(15) אם לכל n מתקיים: $a_{n+1} < a_n^2$, $a_n \in (0,1)$, אז הסדרה a_n מתכנסת.

$$(16) \text{ הסדרה } a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n} \text{ מתבדרת.}$$

(17) אם לכל n מתקיים: $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$, $x_n \in (0,1)$, אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

א. אם הסדרה $(x_n + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ב. אם הסדרה $(x_n^2 + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

(20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת $x_{n+1} \neq x_n$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ו- $a < b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n < b_n$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n \leq b_n$, אז $a \leq b$.

(22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \geq 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \neq 0$.

ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n > 0$.

(23) הוכיחו או הפריכו :

א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n \leq k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.

ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n < k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.

(24) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(25) הוכיחו או הפריכו :

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n) , שעבורן: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n \rightarrow 2$, $b_n \rightarrow 0$ או $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 2$.

ב. $a_n b_n \rightarrow 0$.

(27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

(28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

(29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(30) נתונה הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל $x \geq 0$ מתקיים $\ln(1+x) \leq x$.

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$.

31 אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

32 אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33 א. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

ב. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

34 א. אם, כמעט לכל n , $b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$.

35 א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N > 0$, כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$ לכל $n > N$.

36 אם (a_n) ו- (b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37 א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

38 א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$.

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

(39) א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי n , כך ש- $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ד. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

(40) א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

(41) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < \frac{1}{3}$.

(42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$.

ב. אם קיים קבוע $c > 0$, כך ש- $b_n \geq c$ כמעט לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ לא קיים.

(44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

(45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) = \infty$.

(46) נתונה סדרה חיובית (a_n) .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה : תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא :
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

(47) נתונה סדרה חיובית (a_n) , וידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

(48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < a_n$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.

(49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.
- כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.
- אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

(50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם $|a_n| > 0$ לכל n , אז מתקיים: כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם לכל n מתקיים $|a_n| \geq n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il